

2.2 Α ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Εξίσωση 2^{ου} βαθμού με άγνωστο το x

Είναι κάθε εξίσωση που έχει η μπορεί να πάρει τη μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$.

Το x είναι ο άγνωστος και τα a , β , γ είναι οι συντελεστές.

Ειδικότερα ο γ λέγεται σταθερός όρος.

2.

Ελλιπής εξίσωση 2^{ου} βαθμού

Είναι κάθε εξίσωση της μορφής $ax^2 + \beta x = 0$ με $a \neq 0$ ή της μορφής $ax^2 + \gamma = 0$ με $a \neq 0$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Βασική πρόταση : Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

2.

Επίλυση της εξίσωσης $ax^2 + \beta x = 0$, $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} ax^2 + \beta x &= 0 \\ x(ax + \beta) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{ή} \quad ax + \beta &= 0 \\ x = 0 \quad \text{ή} \quad x &= -\frac{\beta}{a} \end{aligned}$$

3.

Επίλυση της εξίσωσης $ax^2 + \gamma = 0$, $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} ax^2 + \gamma &= 0 \\ ax^2 &= -\gamma \\ x^2 &= -\frac{\gamma}{a} \quad \text{οπότε} \end{aligned}$$

- Αν $-\frac{\gamma}{a} > 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες τις $x = \sqrt{-\frac{\gamma}{a}}$ ή $x = -\sqrt{-\frac{\gamma}{a}}$
- Αν $-\frac{\gamma}{a} = 0$, η εξίσωση έχει ρίζα την $x = 0$
- Αν $-\frac{\gamma}{a} < 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

4.

Επίλυση της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Αναλύουμε το πρώτο μέλος σε γινόμενο παραγόντων, οπότε εξισώνοντας κάθε παράγοντα του γινόμενου με το 0 βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

- α) Η εξίσωση $x^2 - 9 = 0$ έχει λύση το 3 Σ
 β) Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ είναι δευτέρου βαθμού Λ
 γ) Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει λύση το 1 τότε $a + b + \gamma = 0$ Σ
 δ) Η εξίσωση $x^2 - 5x = 0$ δεν έχει λύση το 5 Λ
 ε) Το 0 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 3x = 0$ Σ
 στ) Η εξίσωση $x^2 + 2 = 0$ είναι αδύνατη Σ
 ζ) Η εξίσωση $2x^2 - 3 = 0$ έχει δύο λύσεις Σ
 η) Η εξίσωση $3x^2 + 1 = 4x + 3x(x - 2)$ είναι 2^{ου} βαθμού Λ

Προτεινόμενη λύση

α)

Για $x = 3$ έχουμε $9 - 9 = 0$ αληθές. Άρα η πρόταση είναι σωστή

β)

Αν $a = 0$ η εξίσωση γίνεται $bx + \gamma = 0$ που δεν είναι 2^{ου} βαθμού. Άρα η πρόταση είναι λάθος

γ)

Για $x = 1$ η εξίσωση γίνεται $a + b + \gamma = 0$. Άρα η πρόταση είναι σωστή

δ)

Για $x = 5$ έχουμε $25 - 25 = 0$ αληθές. Άρα η πρόταση είναι λάθος

ε)

Για $x = 0$ έχουμε $0 = 0$ αληθές. Άρα η πρόταση είναι σωστή

στ)

$x^2 + 2 = 0$ άρα $x^2 = -2$ πράγμα αδύνατο. Άρα η πρόταση είναι σωστή

ζ)

$$2x^2 - 3 = 0 \quad \text{άρα} \quad 2x^2 = 3 \quad \text{άρα} \quad x^2 = \frac{3}{2} \quad \text{οπότε} \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Άρα η πρόταση είναι σωστή

η)

$$3x^2 + 1 = 4x + 3x(x - 2) \quad \text{άρα} \quad 3x^2 + 1 = 4x + 3x^2 - 6x \quad \text{άρα} \quad 2x = 1$$

Επομένως η πρόταση είναι λάθος

2.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $(x-3)(x+5) = 0$ ii) $(2x-4)(5x+7) = 0$ iii) $x(3x+4)(5x-1) = 0$

Προτεινόμενη Λύση**i)**

$$(x-3)(x+5) = 0 \quad \text{άρα} \quad \begin{array}{l} x-3=0 \quad \text{ή} \quad x+5=0 \\ x=3 \quad \quad \text{ή} \quad x=-5 \end{array}$$

Σχόλιο 1

ii)

$$(2x-4)(5x+7) = 0 \quad \text{άρα} \quad \begin{array}{l} 2x-4=0 \quad \text{ή} \quad 5x+7=0 \\ 2x=4 \quad \text{ή} \quad 5x=-7 \\ x=2 \quad \text{ή} \quad x=-\frac{7}{5} \end{array}$$

iii)

$$x(3x+4)(5x-1) = 0 \quad \text{άρα} \quad \begin{array}{l} x=0 \quad \text{ή} \quad 3x+4=0 \quad \text{ή} \quad 5x-1=0 \\ x=0 \quad \text{ή} \quad x=-\frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad x=\frac{1}{5} \end{array}$$

3.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $x^2 + x = 0$

ii) $x^2 - 4 = 0$

iii) $x + 2 + (x+2)(x-5) = 0$

iv) $(x-1)(x-8) = 2(x-8)$

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$x^2 + x = 0 \quad \text{άρα} \quad \begin{array}{l} x(x+1) = 0 \\ x=0 \quad \text{ή} \quad x+1=0 \\ x=0 \quad \text{ή} \quad x=-1 \end{array}$$

ii)

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{άρα} \quad \begin{array}{l} (x-2)(x+2) = 0 \\ x-2=0 \quad \text{ή} \quad x+2=0 \\ x=2 \quad \text{ή} \quad x=-2 \end{array}$$

iii)

$$\begin{array}{l} x + 2 + (x+2)(x-5) = 0 \quad \text{άρα} \quad (x+2)[1+(x-5)] = 0 \\ (x+2)(x-4) = 0 \\ x+2=0 \quad \text{ή} \quad x-4=0 \text{ συνεπώς} \\ x=-2 \quad \text{ή} \quad x=4 \end{array}$$

iv)

$$\begin{array}{l} (x-1)(x-8) = 2(x-8) \quad \text{άρα} \quad (x-1)(x-8) - 2(x-8) = 0 \\ (x-8)[(x-1) - 2] = 0 \\ (x-8)(x-3) = 0 \\ x-8=0 \quad \text{ή} \quad x-3=0 \\ x=8 \quad \text{ή} \quad x=3 \end{array}$$

Σχόλια

4.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $(x^2 + 2x)(x - 3) = 0$

ii) $x^2 - 7x + 12 = 0$

iii) $(4x^3 - 16x)(x^2 - 64) = 0$

iv) $x^2 + 4 = 0$

Προτεινόμενη λύση**i)**

$(x^2 + 2x)(x - 3) = 0$ άρα $x(x + 2)(x - 3) = 0$ οπότε

$x = 0$ ή $x = -2$ ή $x = 3$

ii)

$x^2 - 7x + 12 = 0$ άρα $x^2 - (3 + 4)x + 3 \cdot 4 = 0$

$(x - 3)(x - 4) = 0$

$x = 3$ ή $x = 4$

iii)

$(4x^3 - 16x)(x^2 - 64) = 0$ άρα $4x(x^2 - 4)(x^2 - 64) = 0$

$4x(x - 2)(x + 2)(x - 8)(x + 8) = 0$

$x = 0$ ή $x = -2$ ή $x = 2$ ή $x = -8$ ή $x = 8$

Σχόλιο 3

iv)

$x^2 + 4 = 0$ άρα $x^2 = -4$ αδύνατη

5.

Να λυθούν οι εξισώσεις .

i) $(x - 1)(x - 7)(2x + 3) = 0$

ii) $(2x^2 + 5x)(x^2 - 49) = 0$

iii) $(x + 1)(3 - 2x) = 4x^2 - 9$

iv) $(x^2 - 9)(2x + 1) = (x + 3)(2x + 1)^2$

Προτεινόμενη λύση**i)**

$(x - 1)(x - 7)(2x + 3) = 0$ άρα $x - 1 = 0$ ή $x - 7 = 0$ ή $2x + 3 = 0$

$x = 1$ ή $x = 7$ ή $x = -\frac{3}{2}$

ii)

$(2x^2 + 5x)(x^2 - 49) = 0$ άρα $x(2x + 5)(x - 7)(x + 7) = 0$

$x = 0$ ή $2x + 5 = 0$ ή $x - 7 = 0$ ή $x + 7 = 0$

$x = 0$ ή $x = -\frac{5}{2}$ ή $x = 7$ ή $x = -7$

iii)

$(x + 1)(3 - 2x) = 4x^2 - 9$ άρα $(x + 1)(3 - 2x) + 9 - 4x^2 = 0$

$(x + 1)(3 - 2x) + (3 - 2x)(3 + 2x) = 0$

$(3 - 2x)[(x + 1) + (3 + 2x)] = 0$

$(3 - 2x)(3x + 4) = 0$

$3 - 2x = 0$ ή $3x + 4 = 0$

$x = \frac{3}{2}$ ή $x = -\frac{4}{3}$

iv)

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 9)(2x + 1) &= (x + 3)(2x + 1)^2 \quad \text{άρα } (x^2 - 9)(2x + 1) - (x + 3)(2x + 1)^2 = 0 \\
 (x - 3)(x + 3)(2x + 1) - (x + 3)(2x + 1)^2 &= 0 \\
 (x + 3)(2x + 1)[(x - 3) - (2x + 1)] &= 0 \\
 (x + 3)(2x + 1)(-x - 4) &= 0 \\
 x + 3 = 0 \quad \text{ή} \quad 2x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad -x - 4 = 0 \\
 x = -3 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x = -4
 \end{aligned}$$

6.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $(4x - 3)(x^2 - 25) = 6x(4x - 3)(x + 5)$

ii) $(x + 1)(2 - x)(x + 3) + (x + 1)(2 - x)(5 - 2x) = (x + 1)(x - 2)$

iii) $5x^2 + 4x - 1 = 0$

iv) $(x^2 + 2x + 1)(x^3 + 5x) = 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned}
 (4x - 3)(x^2 - 25) &= 6x(4x - 3)(x + 5) \quad \text{άρα } (4x - 3)(x^2 - 25) - 6x(4x - 3)(x + 5) = 0 \\
 (4x - 3)(x - 5)(x + 5) - 6x(4x - 3)(x + 5) &= 0 \\
 (4x - 3)(x + 5)[(x - 5) - 6x] &= 0 \\
 (4x - 3)(x + 5)(-5x - 5) &= 0 \quad \text{άρα} \\
 x = \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad x = -5 \quad \text{ή} \quad x = -1
 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 (x + 1)(2 - x)(x + 3) + (x + 1)(2 - x)(5 - 2x) &= (x + 1)(x - 2) \\
 (x + 1)(2 - x)(x + 3) + (x + 1)(2 - x)(5 - 2x) - (x + 1)(x - 2) &= 0 \\
 (x + 1)(2 - x)(x + 3) + (x + 1)(2 - x)(5 - 2x) + (x + 1)(2 - x) &= 0 \\
 (x + 1)(2 - x)[(x + 3) + (5 - 2x) + 1] &= 0 \\
 (x + 1)(2 - x)(-x + 9) &= 0 \\
 x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 9
 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
 5x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \text{άρα } 4x^2 + 4x + x^2 - 1 &= 0 \\
 4x(x + 1) + (x - 1)(x + 1) &= 0 \\
 (x + 1)(4x + x - 1) &= 0 \\
 (x + 1)(5x - 1) &= 0 \\
 x = -1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
 (x^2 + 2x + 1)(x^3 + 5x) &= 0 \quad \text{άρα } (x + 1)^2 x (x^2 + 5) = 0 \quad \text{οπότε} \\
 (x + 1)^2 = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + 5 &= 0 \\
 x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 = -5 \\
 x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ενώ η } x^2 = -5 \text{ είναι αδύνατη}
 \end{aligned}$$

7.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

ii) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

iii) $5x^2 - 3x - 8 = 0$

iv) $x^2 + (\kappa + \lambda)x + \kappa\lambda = 0$

v) $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{15} = 0$

vi) $16x^2 - 40x + 25 = 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

$9x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \text{άρα} \quad (3x-1)^2 = 0$

$3x-1 = 0$

$x = \frac{1}{3} \quad \text{διπλή λύση}$

ii)

$3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{άρα} \quad 3x^2 - 3x - x + 1 = 0$

$3x(x-1) - (x-1) = 0$

$(x-1)(3x-1) = 0$

$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{3}$

iii)

$5x^2 - 3x - 8 = 0 \quad \text{άρα} \quad 5x^2 - 8x + 5x - 8 = 0$

$5x(x+1) - 8(x+1) = 0$

$(x+1)(5x-8) = 0$

$x = -1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{8}{5}$

iv)

$x^2 + (\kappa + \lambda)x + \kappa\lambda = 0 \quad \text{άρα} \quad x^2 + \kappa x + \lambda x + \kappa\lambda = 0$

$x(x + \kappa) + \lambda(x + \kappa) = 0$

$(x + \kappa)(x + \lambda) = 0$

$x = -\kappa \quad \text{ή} \quad x = -\lambda$

v)

$x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{15} = 0 \quad \text{άρα} \quad x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{5}x + \sqrt{15} = 0$

$x(x + \sqrt{3}) + \sqrt{5}(x + \sqrt{3}) = 0$

$(x + \sqrt{3})(x + \sqrt{5}) = 0$

$x = -\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{5}$

vi)

$16x^2 - 40x + 25 = 0 \quad \text{άρα} \quad (4x-5)^2 = 0$

$4x-5 = 0$

$x = \frac{5}{4} \quad \text{διπλή ρίζα}$